

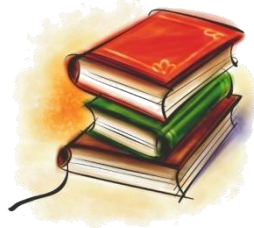
پردازش گفتار

مروری بر پردازش سیگنال دیجیتال

هادی ویسی

h.veisi@ut.ac.ir

دانشگاه تهران - دانشکده علوم و فنون نوین



فهرست

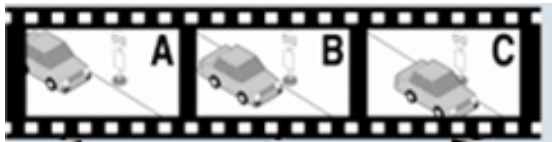
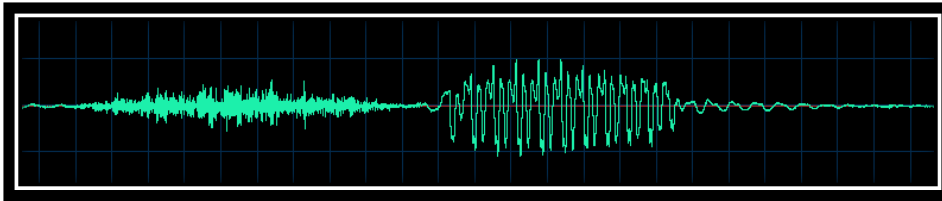
- سیگنال
- سیستم
- نمایش فوریه
 - سری فوریه (فرکانس گسسته)
 - تبدیل فوریه سریع (FFT)
 - تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته)
 - خلاصه و جمع بندی
- تبدیل Z
- ویژگی‌های تبدیل Z و تبدیل فوریه
- تبدیل کسینوسی گسسته (DCT)



سیگنال ...

○ سیگنال

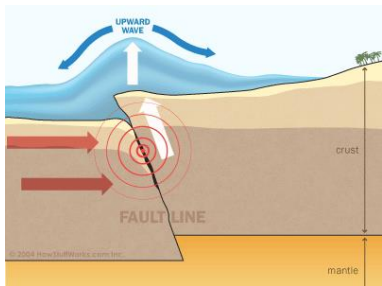
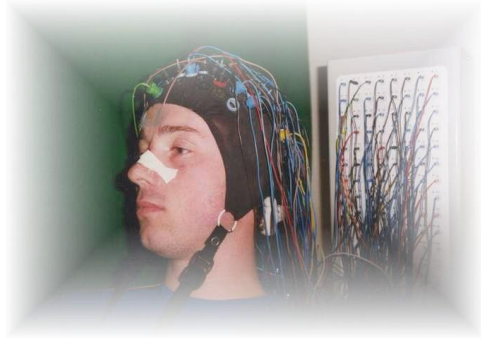
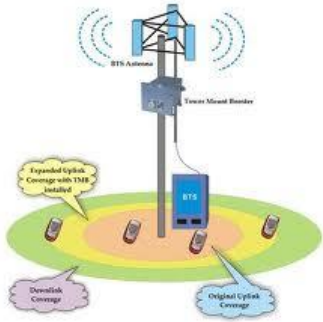
- تابعی از یک یا چند متغیر مستقل (از جمله زمان)
- که حاوی اطلاعات هستند
- درباره رفتار یا ساختار یک پدیده فیزیکی



○ مثال

- یک بعدی: گفتار
 - تابعی از زمان
- دو بعدی: تصویر
 - تابعی از طول و عرض (مکان)
- سه بعدی: ویدئو
 - تابعی از طول و عرض (مکان) و زمان

سیگنال ...



انواع

- الکتریکی و مخابراتی: ولتاژ، جریان، ...
- زیستی (Biological): قلب، مغز، ...
- محیطی: لرزش زمین، ...
- صنعتی و ساخته انسان: قیمت سهام، مصرف برق، ...

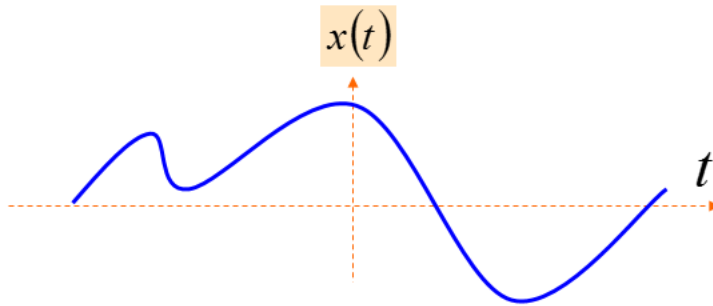




سیگنال ...

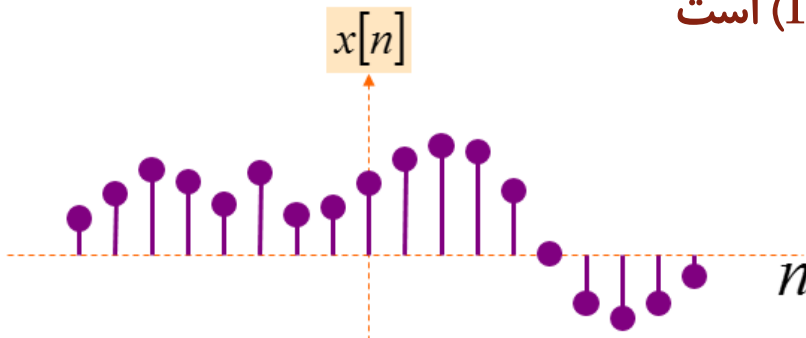
○ پیوسته در زمان (CT: Continuous-Time)

- بیشتر پدیده های فیزیکی از این نوع هستند: فشار، دما، ولتاژ و جریان، ...



○ گسسته در زمان (DT: Discrete-Time)

- بیشتر سیگنال ها ساخت بشر از این نوع هستند: نرخ ارز، مصرف برق در تهران
- در $x[n]$ مقدار n یک عدد حقیقی (Integer) است
- زمان به صورت واحدهای گسسته تغییر می کند

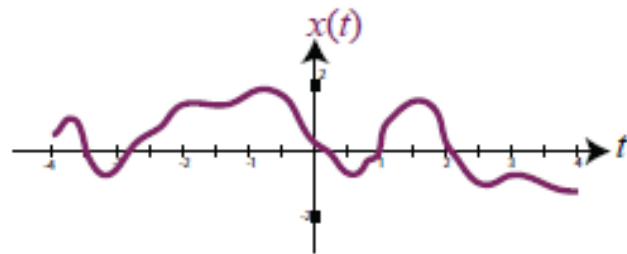




سیگنال ...

○ دامنه پیوسته (Continuous Amplitude)

- مقدار دامنه پیوسته است

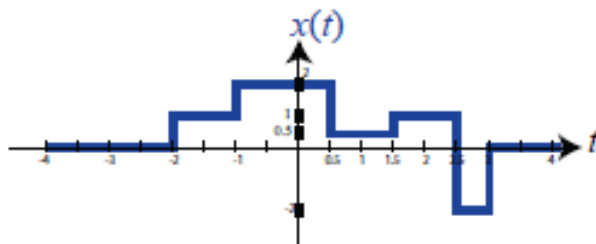


- مقدار دما

- مقدار جریان الکتریسیته

○ دامنه گسسته (Discrete Amplitude)

- مقدار دامنه گسسته است



- یک تصویر: از تعدادی پیکسل (نقطه) تشکیل شده

- یک فایل صوتی در رایانه

- که از تعدادی نمونه (Sample) تشکیل شده است

- جمعیت ایران در طول زمان



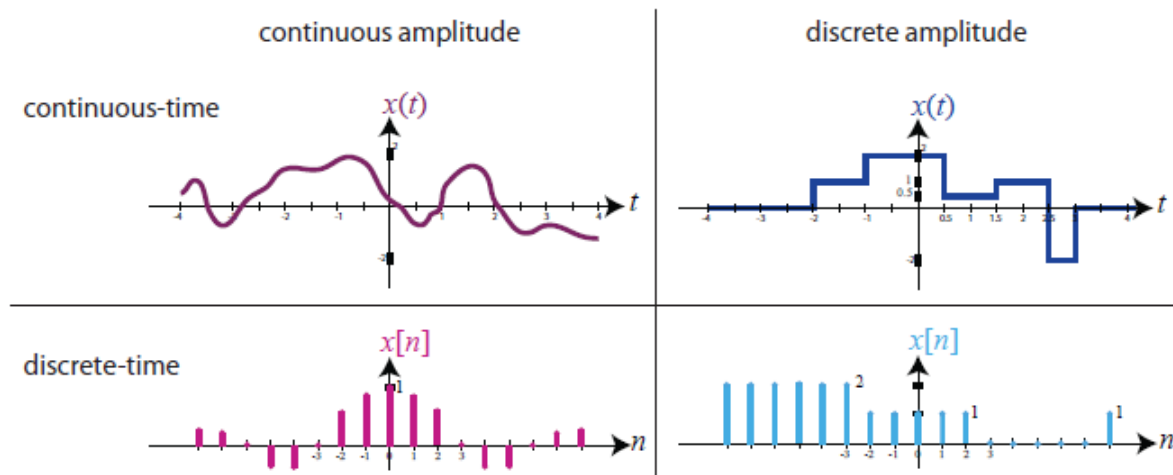
سیگنال ...

○ آنالوگ (Analog): دامنه و زمان پیوسته است

- بیشتر سیگنال‌های طبیعی
- مسیر حرکت یک سفینه فضایی، جریان الکتریسیته، موج FM رادیو، صدا

○ رقومی (Digital): دامنه و زمان گسسته است

- علاوه بر زمان، دامنه هم سطوح محدودی دارد
- همه سیگنال‌های داخل کامپیوتر گسسته هستند (Digital)



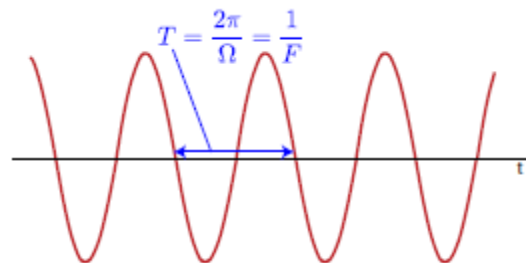
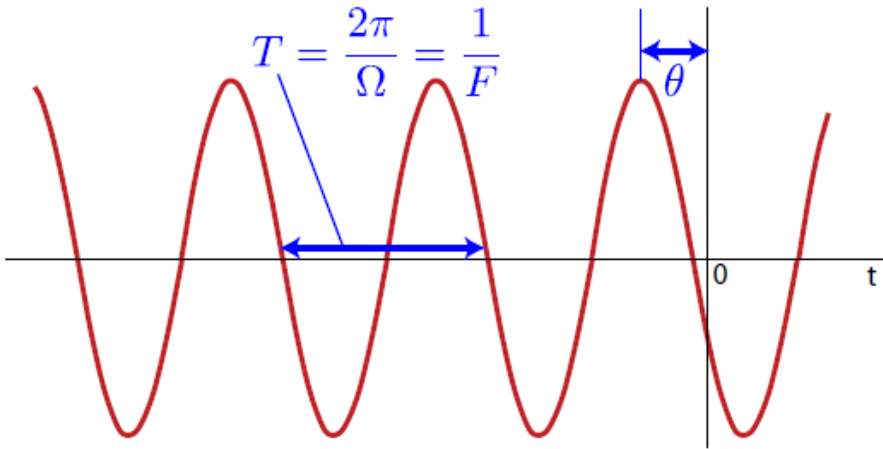


سیگنال ...

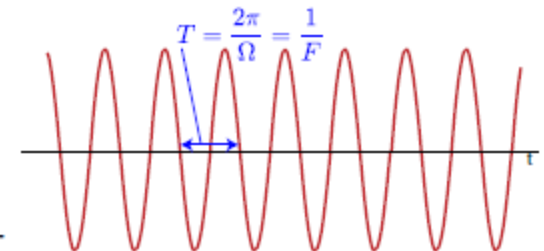
○ مفهوم فرکانس (پیوسته در زمان) ..

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta) = A \cos(2\pi F t + \theta), \quad t \in \mathbb{R}$$

- ▶ analog signal, $\because -A \leq x_a(t) \leq A$ and $-\infty < t < \infty$
- ▶ A = amplitude
- ▶ Ω = frequency in rad/s
- ▶ F = frequency in Hz (or cycles/s); note: $\Omega = 2\pi F$
- ▶ θ = phase in rad



larger F , smaller T

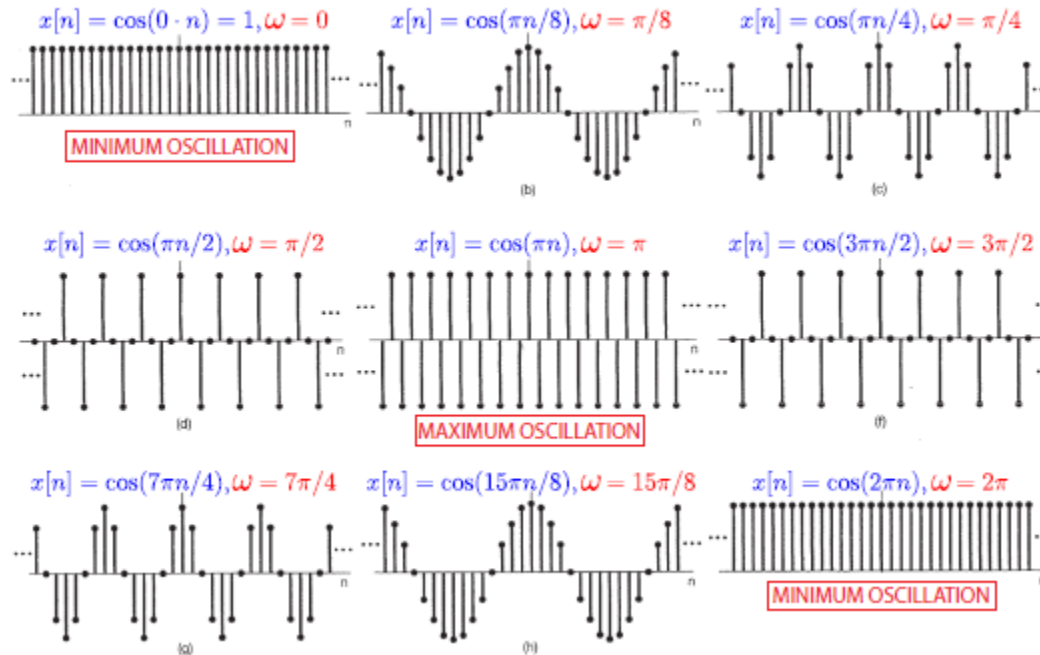




سیگنال ...

○ مفهوم فرکانس (تابع سینوسی گسسته در زمان)

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta) = A \cos(2\pi f n + \theta), \quad n \in \mathbb{Z}$$





سیگنال ...

○ دیجیتال و آنالوگ

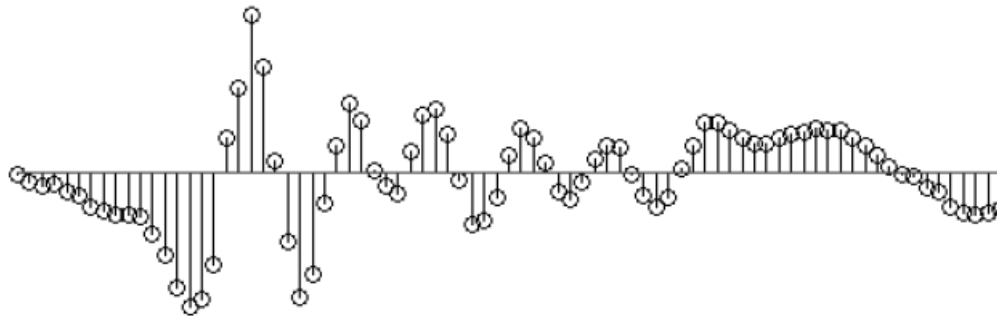
- سیگنال آنالوگ $x_a(t)$

- سیگنال دیجیتال (سیگنال زمان-گسسته) $x[n] = x_a(nT)$

- هر T ثانیه یک نمونه برداشته می شود

- بسامد (فرکانس) نمونه برداری $F_s = 1/T$

- برای بسامد نمونه گیری $F_s = 8\text{kHz}$ ، مدت زمان نمونه برداری متناظر آن ۱۲۵ میکرو ثانیه



یک عدد صحیح



سیگنال ...

○ سیگنال موج سینوسی

$$x_0[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0)$$

دامنه

بسامد زاویه‌ای

فاز

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

بسامد خطی نرمال شده

$$\boxed{\text{دوره تناوب}} \rightarrow T_0 = 1/f_0$$

• اهمیت سیگنال سینوسی

○ سیگنال‌های گفتار را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از سینوس‌ها تجزیه کرد

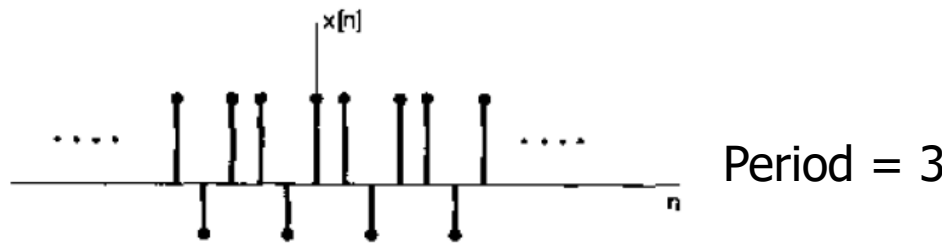
○ وقتی پیچ باس یک آمپلی فایر را زیاد می‌کنیم تا صدا بم‌تر شود، در واقع میزان دریافت سینوس‌های با بسامد پایین را افزایش می‌دهیم



سیگنال ...

○ سیگنال دوره‌ای (Periodic)

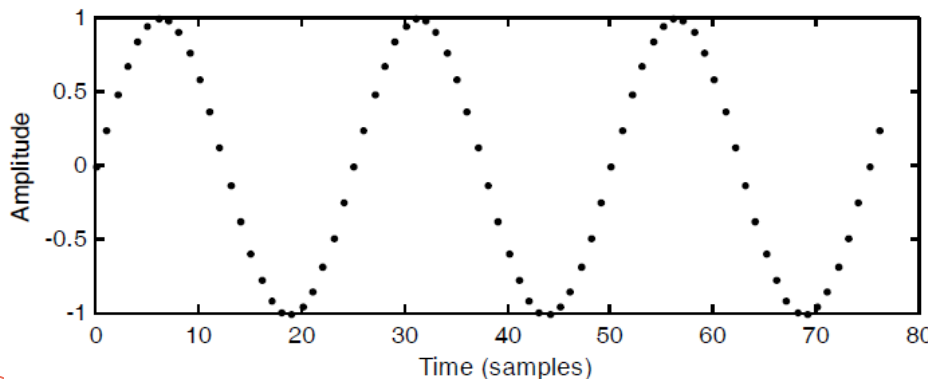
- سیگنال $x[n]$ با دوره N است اگر و فقط اگر $x[n] = x[n+N]$



- سیگنال موج سینوسی $x_0[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0)$

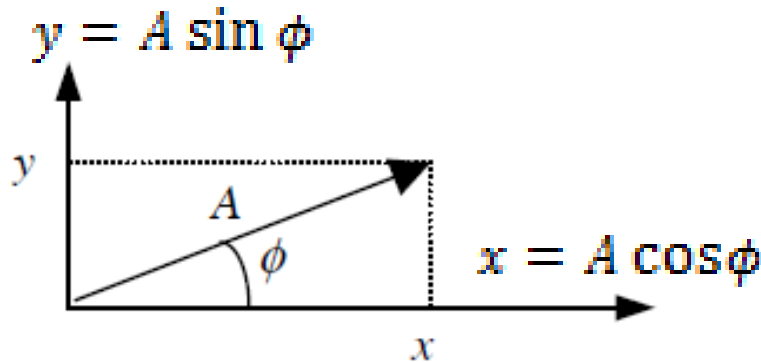
○ دوره تناوب N است اگر $\omega_0 = 2\pi/N$

○ باید $2\pi k/\omega_0$ عدد حقیقی باشد





سیگنال ...



$$j = \sqrt{-1}$$

○ نمایش مختلط

• نمایش دکارتی $z = x + jy$

• نمایش قطبی $z = A e^{j\phi}$

دامنه A فاز ϕ

$$A = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

• رابطه اوایلر

بخش حقیقی نمایش مختلط

$$x_0[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0) = \text{Re}\{A_0 e^{j(\omega_0 n + \phi_0)}\}$$

• نمایش سیگنال سینوسی



سیگنال ...

جمع دو سیگنال سینوسی

$$A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0) + A_2 \cos(\omega_0 n + \phi_1) = ?$$

با بسامد یکسان ولی دامنه و فازهای مختلف

یک سیگنال سینوسی
با همان بسامد

$$A_0 e^{j(\omega_0 n + \phi_0)} + A_1 e^{j(\omega_0 n + \phi_1)} = e^{j\omega_0 n} (A_0 e^{j\phi_0} + A_1 e^{j\phi_1}) = e^{j\omega_0 n} A e^{j\phi} = A e^{j(\omega_0 n + \phi)}$$

بخش حقیقی طرفین

$$A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0) + A_2 \cos(\omega_0 n + \phi_1) = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

$$A_0 e^{j\phi_0} + A_1 e^{j\phi_1} = A e^{j\phi}$$

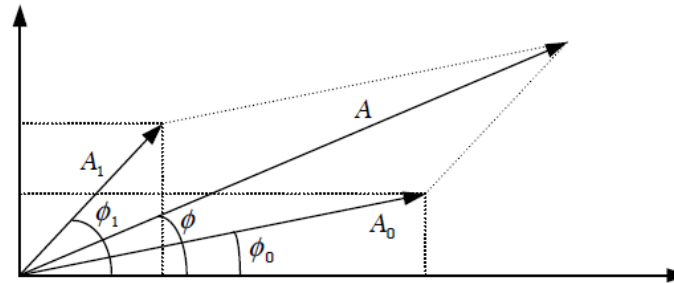


$$\tan \phi = \frac{A_0 \sin \phi_0 + A_1 \sin \phi_1}{A_0 \cos \phi_0 + A_1 \cos \phi_1}$$

برابری بخش حقیقی و موهومی

$$A^2 = A_0^2 + A_1^2 + 2A_0 A_1 \cos(\phi_0 - \phi_1)$$

$$\begin{cases} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 \\ \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$



حاصل جمع N سینوسی با بسامد یکسان، یک سینوسی دیگر با همان بسامد است

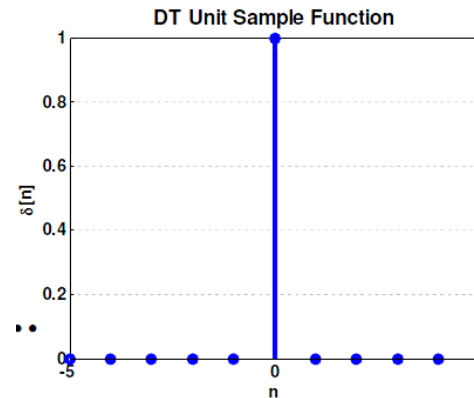


سیگنال ...

سیگنال ضربه واحد (Unit Sample (impulse) Function) $\delta[n]$

هر سیگنال را می توان بر حسب این سیگنال نوشت

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$$



$$x[n] = \dots + x[-2]\delta[n + 2] + x[-1]\delta[n + 1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n - 1] + \dots$$

↓

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Coefficients}} \underbrace{\delta[n - k]}_{\text{Basic Signals}}$$

Coefficients

Basic Signals



سیگنال ...

تابع پله (Unit Step Function) $u[n]$

تعریف

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

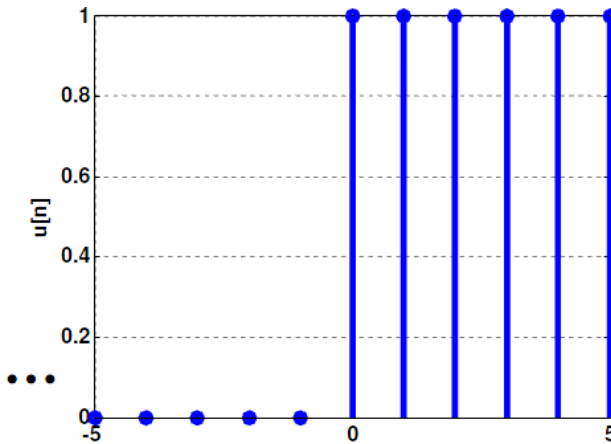
داریم

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots$$

or

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$



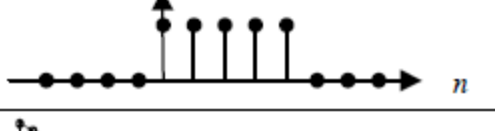
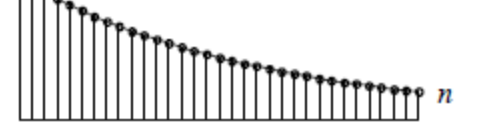
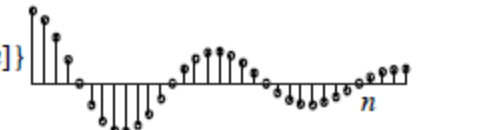
به صورت معکوس داریم $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$





سیگنال ...

چند سیگنال دیجیتال رایج

<i>Kronecker delta, or unit impulse</i>	$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
<i>Unit step</i>	$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	
<i>Rectangular signal</i>	$\text{rect}_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
<i>Real exponential</i>	$x[n] = a^n u[n]$	
<i>Complex exponential</i>	$x[n] = a^n u[n] = r^n e^{jn\omega_0} u[n]$ $= r^n (\cos n\omega_0 + j \sin n\omega_0) u[n]$	



سیگنال

توان (Power)

- میانگین اندازه نمونه ها

$$P_{\infty} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M + 1} \sum_{n=-M}^M |x[n]|^2$$

تعداد نمونه های سیگنال

انرژی (Energy)

- جمع اندازه نمونه ها

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

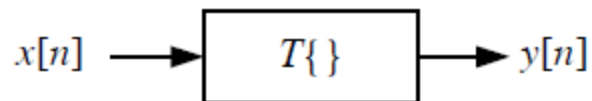


سیستم‌های دیجیتال ...

○ تعریف

- ابزاری است که یک عملیات روی یک سیگنال انجام می دهد
- یک سیگنال را به عنوان ورودی دریافت می کند و یک سیگنال دیگر را به عنوان خروجی تولید می کند
- پردازش (Process) سیگنال = عبور دادن سیگنال از یک سیستم
- یک سیستم را می توان یک پردازش روی سیگنال در نظر گرفت که سیگنال ورودی را به سیگنال دیگری تبدیل (Transform) می کند

$$y[n] = T\{x[n]\}$$



- سیستم $T\{\}$
- دریافت سیگنال ورودی $x[n]$
- تولید سیگنال خروجی $y[n]$

○ مثال: سیستم تبدیل گفتار به متن

- ورودی: سیگنال یک بعدی گفتار
- خروجی: دنباله گسسته کلمات



سیستم‌های دیجیتال ...

ویژگی ...

- علی (Causality): سیستمی که خروجی آن به ورودی‌های آن در زمان آینده وابسته نیست و فقط به ورودی‌های حال و گذشته وابسته است

- بدون حافظه (Memoryless): خروجی $y[n]$ سیستم وابستگی به ورودی‌های زمان قبلی و بعد $x[n \pm N]$ وابسته نیست
 - به لحظه قبل و بعد وابسته نیست

- خطی (Linear): سیستم T خطی (Linear) است، اگر و تنها اگر

$$T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\}$$

- برای همه a_1 ها و a_2 ها
- برای تمام سیگنال‌های $x_1[n]$ و $x_2[n]$

- نامتغیر با زمان (Time-Invariant): جابجایی ورودی به اندازه مشخص، معادل همان میزان جابجایی در خروجی باشد

$$y[n - n_0] = T\{x[n - n_0]\}$$



سیستم‌های دیجیتال ...

ویژگی ...

- سیستم‌های غیر خطی (Nonlinear)

$$T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\}$$

- عدم ارضای رابطه خطی
- بیشتر سیستم‌های پردازش گفتار غیر خطی هستند!

- سیستم پایدار (Stable)

- به ازای ورودی با دامنه (انرژی) محدود، خروجی با دامنه (انرژی) ایجاد کند
- اگر $|x[n]| < \infty$ باشد، آنگاه $|y[n]| < \infty$ (برای همه n ها)

- سیستم معکوس پذیر (Invertible)

- اگر در سیستمی به ازای ورودی $x[n]$ خروجی $y[n]$ را تولید کند، معکوس پذیر است اگر سیستم دیگری وجود داشته باشد که به ازای ورودی $y[n]$ خروجی $x[n]$ را تولید کند.



سیستم‌های دیجیتال ...

ویژگی ...

سیستم خطی و نامتغیر با زمان (LTI: Linear Time-Invariant)

وقتی ورودی سیستم ضربه واحد $\delta[n]$ است $\delta[n] \rightarrow h[n]$

From TI:

\Downarrow

$$\delta[n - k] \rightarrow h[n - k]$$

From LTI:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \rightarrow y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]}_{\text{Convolution Sum}}$$

If $x_k[n] \rightarrow y_k[n]$
 Then $\sum_k a_k x_k[n] \rightarrow \sum_k a_k y_k[n]$

رابطه ورودی و خروجی

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] = x[n] * h[n]$$



پاسخ ضربه $h[n]$: پاسخ سیستم وقتی که ورودی $x[n] = \delta[n]$ (تابع ضربه) است



سیستم‌های دیجیتال ...

ویژگی

- سیستم خطی و نامتغیر با زمان (LTI: Linear Time-Invariant)

- رابطه ورودی و خروجی

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

کانولوشن

پاسخ ضربه

- وقتی سیگنالی از یک سیستم LTI عبور می‌کند، سیگنال ورودی در تابع مشخصه سیستم کانوالو می‌شود

- کل سیستم را می‌توان با داشتن تابع $h[n]$ تعریف کرد

- تابع مشخصه سیستم

- مهم‌ترین ویژگی: با داشتن پاسخ سیستم برای برخی ورودی‌های خاص، می‌توان پاسخ سیستم را برای همه ورودی‌ها حساب کرد.

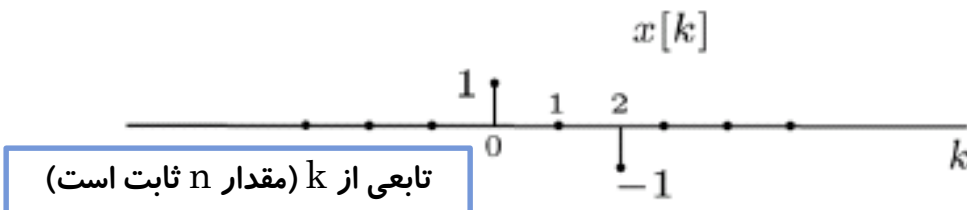


سیستم‌های دیجیتال ...

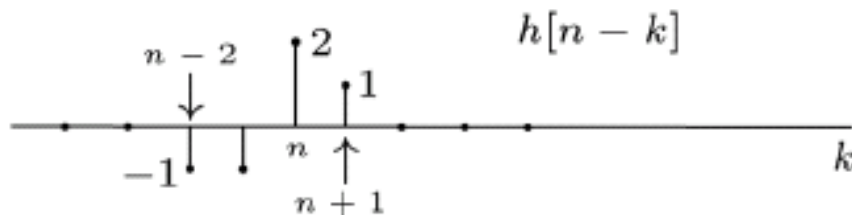
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



مثال کانولوشن (۱)



$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[0-k]$$



$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k]$$

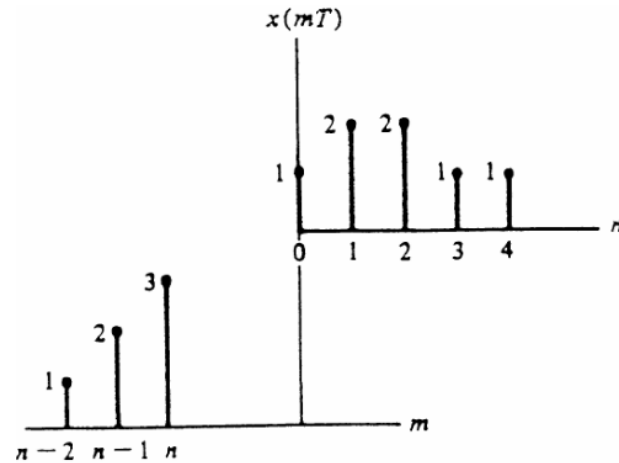
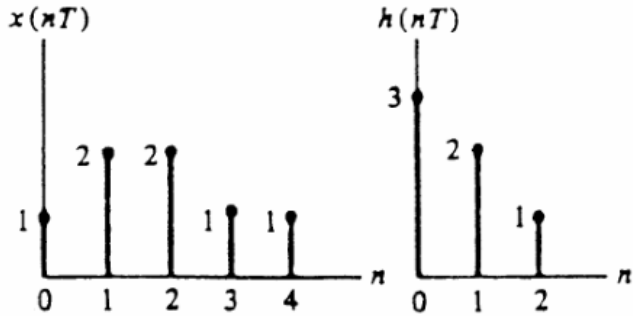
$$\begin{aligned}
 y[n] &= 0 \quad \text{for } n < -1 \\
 y[-1] &= 1 \times 1 = 1 \\
 y[0] &= 0 \times 1 + 1 \times 2 = 2 \\
 y[1] &= (-1) \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times (-1) = -2 \\
 y[2] &= (-1) \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times (-1) = -3 \\
 y[3] &= (-1) \times (-1) + 0 \times (-1) = 1 \\
 y[4] &= (-1) \times (-1) = 1 \\
 y[n] &= 0 \quad \text{for } n > 4
 \end{aligned}$$

- معکوس کردن $h[-k] : h[k]$
- شیفت دادن $h[-k+n] : h[-k]$
- ضرب $x[k]$ در $h[-k+n]$
- جمع



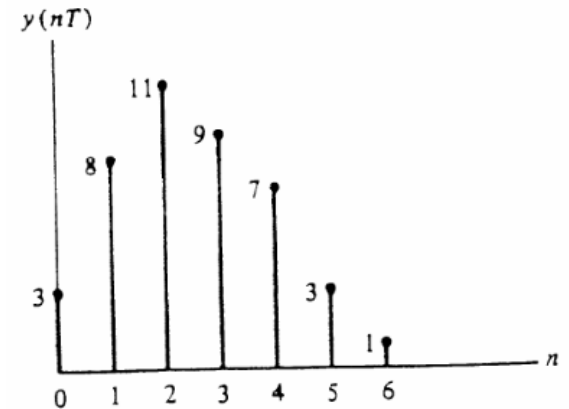
سیستم‌های دیجیتال ...

○ مثال کانولوشن (۲)



Samples $x(mT)$

	0	0	1	2	2	1	1	0
$n = 0$	1	2	3	0	0	0	0	0
$n = 1$	0	1	2	3	0	0	0	0
$n = 2$	0	0	1	2	3	0	0	0
$n = 3$	0	0	0	1	2	3	0	0
$n = 4$	0	0	0	0	1	2	3	0
$n = 5$	0	0	0	0	0	1	2	3
$n = 6$	0	0	0	0	0	0	1	2





سیستم‌های دیجیتال ...

○ مثال کانولوشن (۳)

- $n = 0$

$$x[i] = \quad \quad \quad 5, 1, -2, 4, 0, 0, 0, \dots$$

$$h[0-i] = \dots, 0, 3, 2, 1$$

$$y[0] = 5 \cdot 1 = 5$$

- $n = 1$

$$x[i] = \quad \quad \quad 5, 1, -2, 4, 0, 0, 0, \dots$$

$$h[1-i] = \dots, 0, 0, 3, 2, 1$$

$$y[1] = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11$$

- $n = 2$

$$x[i] = \quad \quad \quad 5, 1, -2, 4, 0, 0, 0, \dots$$

$$h[2-i] = \dots, 0, 0, 0, 3, 2, 1$$

$$y[2] = 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 15$$

- $n = 3$

$$x[i] = \quad \quad \quad 5, 1, -2, 4, 0, 0, 0, \dots$$

$$h[3-i] = \dots, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 1$$

$$y[3] = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 3$$

- $n = 4$

$$x[i] = \quad \quad \quad 5, 1, -2, 4, 0, 0, 0, \dots$$

$$h[4-i] = \dots, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 1$$

$$y[4] = (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 2$$

- $n = 5$

$$x[i] = \quad \quad \quad 5, 1, -2, 4, 0, 0, 0, \dots$$

$$h[5-i] = \dots, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 1$$

$$y[5] = 4 \cdot 3 = 12$$

- $n > 5$ (shown for $n = 6$)

$$x[i] = \quad \quad \quad 5, 1, -2, 4, 0, 0, 0, \dots$$

$$h[n-i] = \dots, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 1$$

$$y[n] = 0, \quad n > 5$$

$$x[n] = 5, 1, -2, 4, 0, 0, \dots$$

$$h[n] = 1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots$$

$$y[n] = \begin{cases} 5, 11, 15, 3, 2, 12, 0, 0, \dots, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



سیستم‌های دیجیتال ...

Speech_ConvExample.m

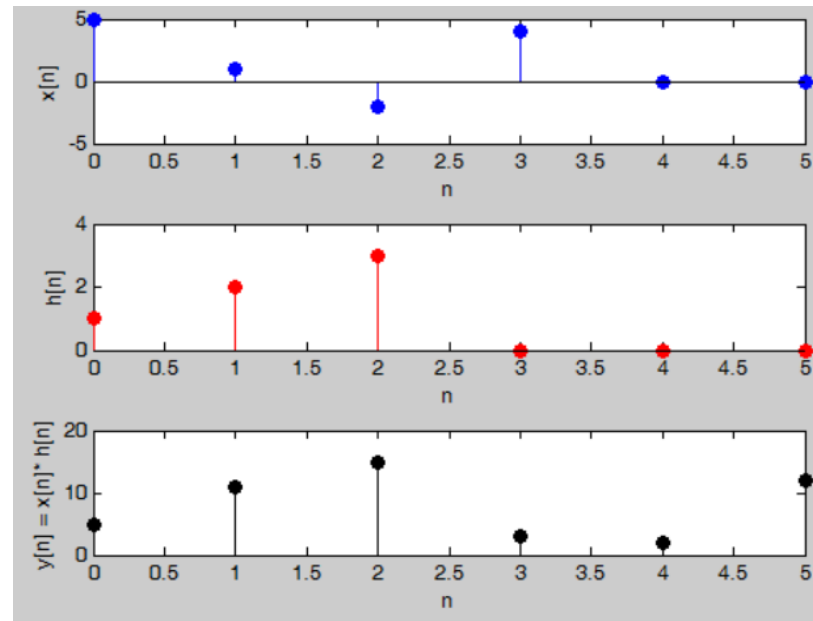
مثال کانولوشن (۳) $x[n] = 5, 1, -2, 4, 0, 0, \dots$
 $h[n] = 1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots$

• در MATLAB

```
n = 0:5;
x = [5 1 -2 4 0 0];
h = [1 2 3 0 0 0];
y = conv(x, h);
subplot(3,1,1);
stem(n, x, 'b-', 'fill');
xlabel('n'); ylabel('x[n]');

subplot(3,1,2);
stem(n, h, 'r-', 'fill');
xlabel('n'); ylabel('h[n]');

subplot(3,1,3);
stem(n, y(1:length(n)), 'k-', 'fill');
xlabel('n'); ylabel('y[n] = x[n]* h[n]');
```

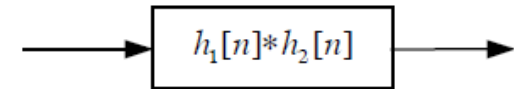
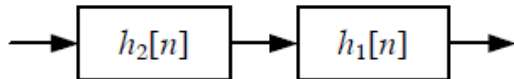
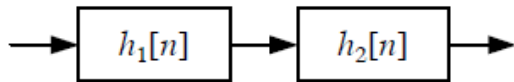




سیستم‌های دیجیتال ...

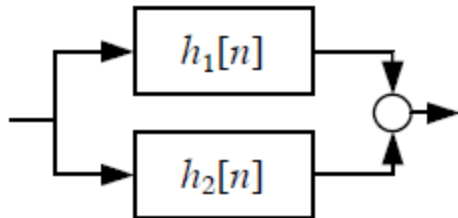
○ سیستم خطی و نامتغیر با زمان (LTI): ویژگی‌های کانولوشن

• تعویض‌پذیری (Commutative)

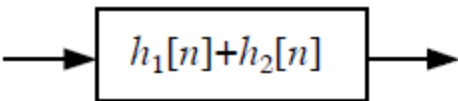


$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

• توزیعی (Distributive)



$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



• انجمنی (Associative)

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$



سیستم‌های دیجیتال ...

○ سیستم خطی و متغیر با زمان (LTV: Linear Time-Variant)

- رابطه ورودی و خروجی

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n, n-k]$$

- سیستم LTI یک حالت خاص از LTV است $g[n, n-k] = h[n-k]$

- مثال: مدولاتور دامنه (AM: amplitude modulator)

$$y[n] = x[n] \cos \omega_0 n$$

- سیگنال گفتار خروجی یک سیستم LTV است!

○ به دلیل مشکل بودن تحلیل سیستم‌های LTV، آنها را به صورت تقریبی با LTI تحلیل می‌کنند



سیستم‌های دیجیتال

سیستم‌های غیرخطی: در پردازش گفتار

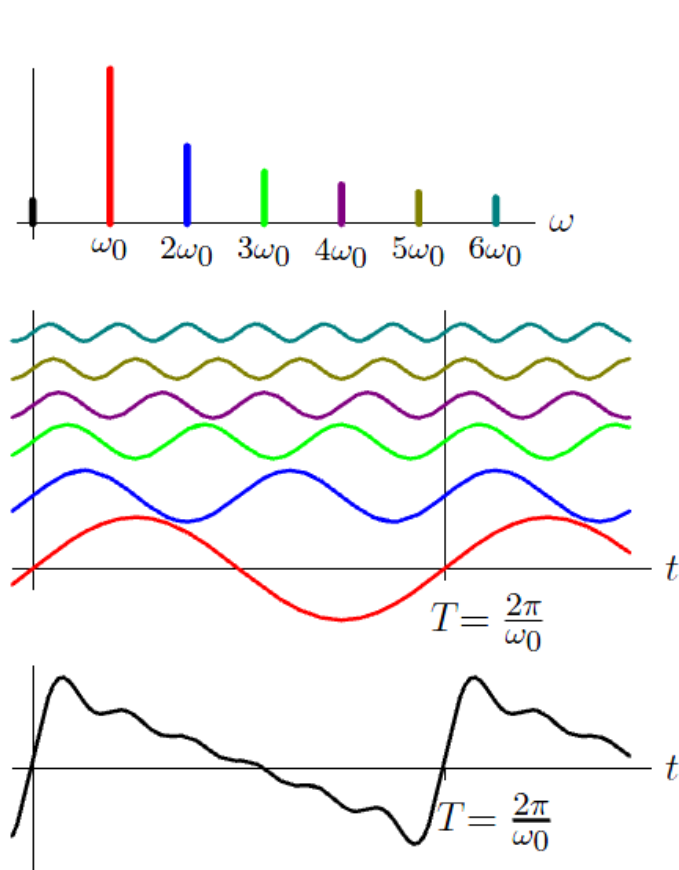
Nonlinear System	Equation
<i>Median Smoother</i> of order $(2N+1)$	$y[n] = \text{median}\{x[n-N], \dots, x[n], \dots, x[n+N]\}$
<i>Full-Wave Rectifier</i>	$y[n] = x[n] $
<i>Half-Wave Rectifier</i>	$y[n] = \begin{cases} x[n] & x[n] \geq 0 \\ 0 & x[n] < 0 \end{cases}$
<i>Frequency Modulator</i>	$y[n] = A \cos(\omega_0 + \Delta\omega x[n])n$
<i>Hard-Limiter</i>	$y[n] = \begin{cases} A & x[n] \geq A \\ x[n] & x[n] < A \\ -A & x[n] \leq -A \end{cases}$
<i>Uniform Quantizer</i> (L -bit) with $2N = 2^L$ intervals of width Δ	$y[n] = \begin{cases} (N-1/2)\Delta & x[n] \geq (N-1)\Delta \\ (m+1/2)\Delta & m\Delta \leq x[n] < (m+1)\Delta & 0 \leq m < N-1 \\ (-m+1/2)\Delta & -m\Delta \leq x[n] < -(m-1)\Delta & 0 < m < N-1 \\ (-N+1/2)\Delta & x[n] < -(N-1)\Delta \end{cases}$

دارای حافظه

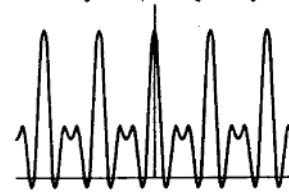


نمایش فوریه: سری فوریه (فرکانس گسسته) ...

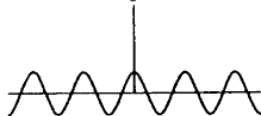
- ایده: هر سیگنالی را می‌توان بر حسب توابع نمایی (سینوس و کسینوس) با فرکانس‌ها و اندازه‌های مختلف نوشت



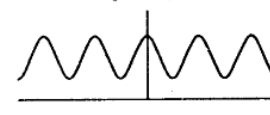
$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$



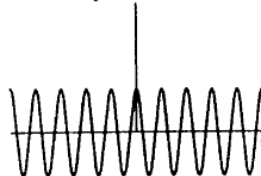
$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cos 2\pi t$$



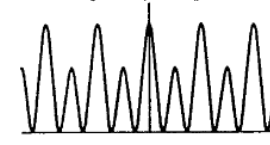
$$x_0(t) + x_1(t)$$



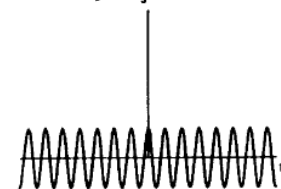
$$x_2(t) = \cos 4\pi t$$



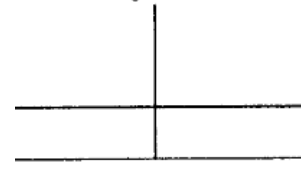
$$x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$$



$$x_3(t) = \frac{2}{3} \cos 6\pi t$$



$$x_0(t) = 1$$





سری فوریه (فرکانس گسسته) ...

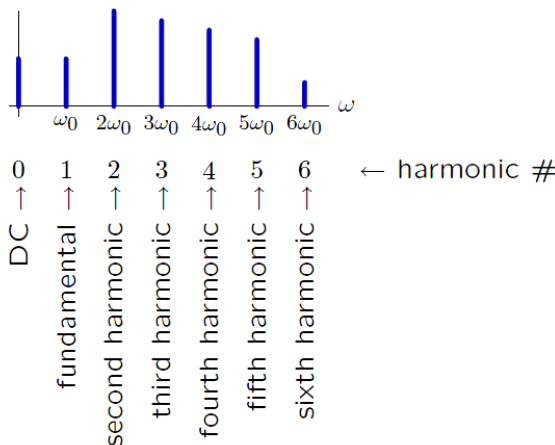
تبدیل فوریه گسسته (DFT: Discrete Fourier Transform)

- سیگنال گسسته متناوب با دوره تناوب N
- داریم: $x_N[n] = x_N[n + N]$

ضرایب فوریه
سری فوریه

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad 0 \leq k < N$$

$$x_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{j2\pi nk/N} \quad 0 \leq n < N$$



- مقدار $X_N[k]$ به ازای $k=0$ را DC می گویند
- مقدار $X_N[k]$ به ازای $k=\pm 1$ را هارمونی اول (اصلی)
- به ازای $k=\pm 2$ را هارمونی دوم
- و ...



سری فوریه (فرکانس گسسته) ...

تبدیل گسسته یک سیگنال (گسسته)

$$X[k] = T\{x[n]\}$$

• خروجی تبدیل یک سیگنال گسسته است

• تبدیل خطی: سیگنال ورودی را به صورت ترکیبی خطی از سیگنال دیگری است

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\varphi_k[n]$$

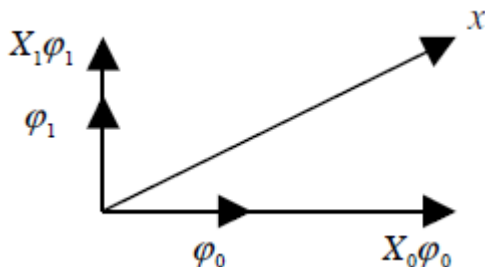
مجموعه‌ای از توابع متعامد

ضرب داخلی

• توابع متعامد (Orthonormal)

$$\langle \varphi_k[n], \varphi_l[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_k[n]\varphi_l^*[n] = \delta[k-l]$$

• بنابراین $X[k]$ ، نگاهت (Projection) بردار $x[n]$ روی توابع متعامد است



$$X[k] = \langle x[n], \varphi_k[n] \rangle$$



سری فوریه (فرکانس گسسته) ...

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad 0 \leq k < N$$

$$x_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{j2\pi nk/N} \quad 0 \leq n < N$$

مثال: تابع سینوسی

$$x[n] = \cos(\pi n / 8) + \cos(\pi n / 4 + \pi / 4)$$

$$\cos x = \text{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \text{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

• متناوب با $\omega_0 = \pi/8$ با $N = 16$

• از قانون اویلر داریم $x[n] = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}] + \frac{1}{2}[e^{j\pi/4} e^{j2\omega_0 n} + e^{-j\pi/4} e^{-j2\omega_0 n}]$

• ضرایب سری فوریه $a_k = X_N[k]$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1/2$$

$$a_{-1} = 1/2$$

$$a_2 = e^{j\pi/4} / 2$$

$$a_{-2} = e^{-j\pi/4} / 2$$

$$a_3 = 0$$

$$a_{-3} = 0$$

⋮

$$a_{15} = a_{-1+16} = a_{-1} = \frac{1}{2}$$
$$a_{66} = a_{2+4 \times 16} = a_2 = e^{j\pi/4} / 2$$

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{jN\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} \quad a_{k+N} = a_k$$

• ویژگی انحصاری در حالت گسسته \Leftarrow سری فوریه متناوب است

ضرایب
سری
فوریه



$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad 0 \leq k < N$$

$$x_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{j2\pi nk/N} \quad 0 \leq n < N$$

سری فوریه (فرکانس گسسته) ...



○ مثال: موج مربعی ...

• سیگنال ورودی: گسسته و متناوب

$$a_0 = \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] = 2N_1 + 1 = a_N = a_{-N} = a_{6N} = \dots$$

• ضرایب مضرب N

• سایر ضرایب (غیر مضرب N)

$$a_k = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\omega_0 n} = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\omega_0(m-N_1)}$$

Using $m=n+N_1$

$$= e^{jk\omega_0 N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} (e^{-jk\omega_0})^m = e^{jk\omega_0 N_1} \frac{1 - e^{-jk\omega_0(2N_1+1)}}{1 - e^{jk\omega_0}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1 - r^N}{1 - r}$$

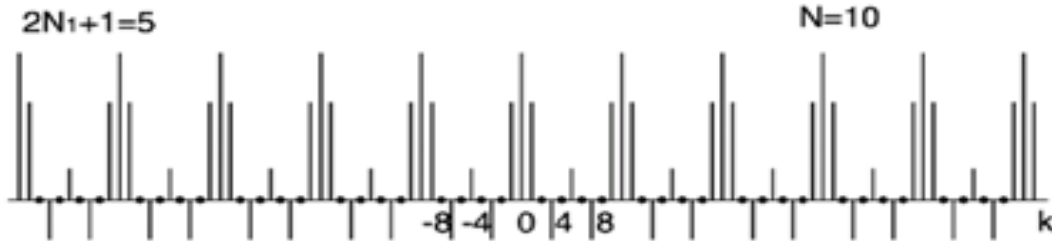
$$= \frac{\sin[k(N_1 + 1/2)\omega_0]}{\sin(k\omega_0/2)} = \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$



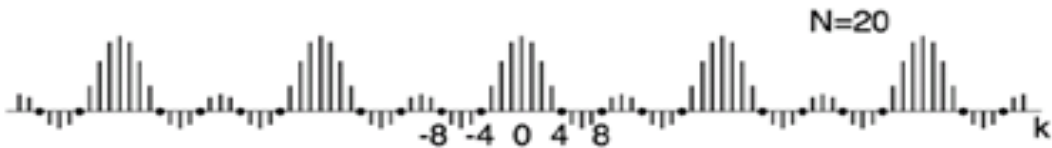
سری فوریه (فرکانس گسسته) ...

مثال: موج مربعی

- سیگنال ورودی: گسسته و متناوب
- سیگنال خروجی: گسسته و متناوب



$$a_k = \frac{\sin[2\pi k (N_1 + 1/2) / N]}{\sin(\pi k / N)}$$



$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} \overbrace{e^{jN\omega_0 n}}^{2\pi n} = e^{jk\omega_0 n}$$

تبدیل گسسته متناوب است



با افزایش دوره تناوب، سیگنال حوزه فوریه به سمت پیوسته شدن پیش می رود



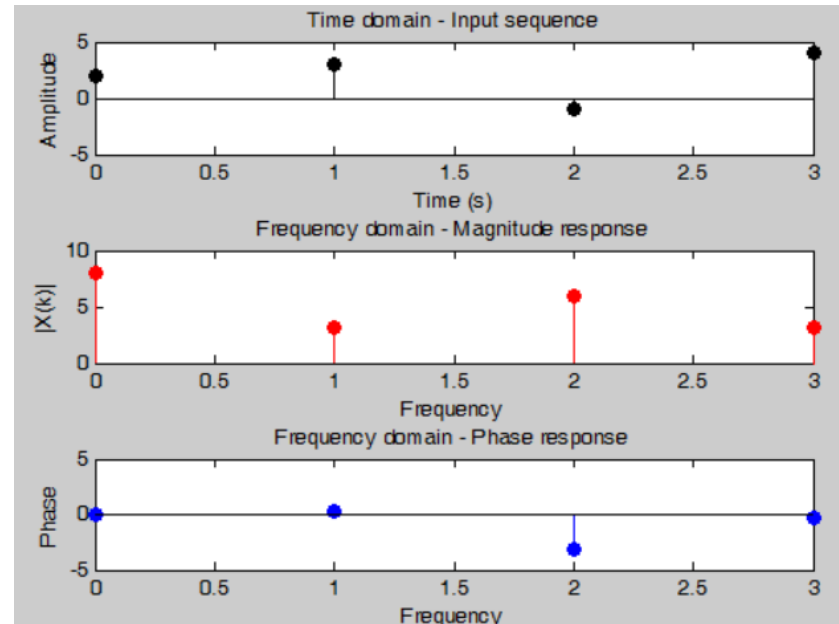
سری فوریه (فرکانس گسسته) ...

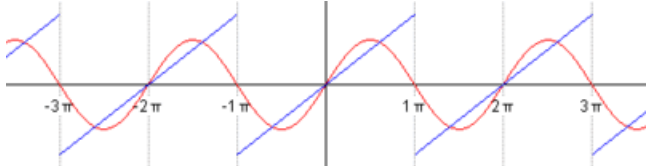
Speech_DFTExample.m

مثال ○

• در MATLAB

```
x = [2 3 -1 4];
N = length(x);
X = zeros(N,1);
for k = 0:N-1
    for n = 0:N-1
        X(k+1) = X(k+1) + x(n+1)*exp(-j*2*pi*n*k/N);
    end
end
t = 0:N-1;
subplot(311)
stem(t,x,'k-','fill');
xlabel('Time (s)'); ylabel('Amplitude');
title('Time domain - Input sequence')
subplot(312)
stem(t,abs(X),'r-','fill')
xlabel('Frequency'); ylabel('|X(k)|');
title('Frequency domain - Magnitude response')
subplot(313)
stem(t,angle(X),'b-','fill')
xlabel('Frequency'); ylabel('Phase');
title('Frequency domain - Phase response')
```



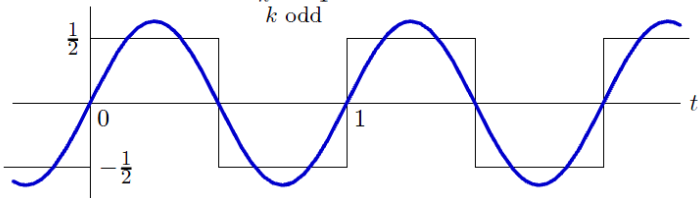


سری فوریه (فرکانس گسسته)

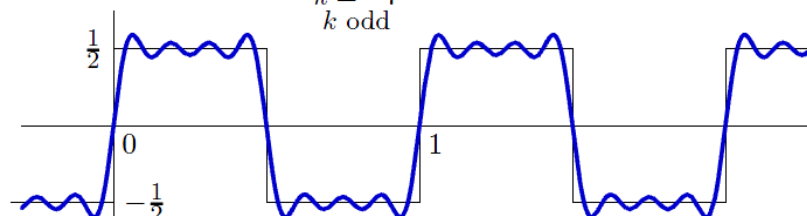
○ تبدیل فوریه گسسته = سری فوریه

• برای سیگنال مربعی (پیوسته!) - اثر افزایش تعداد ضرایب

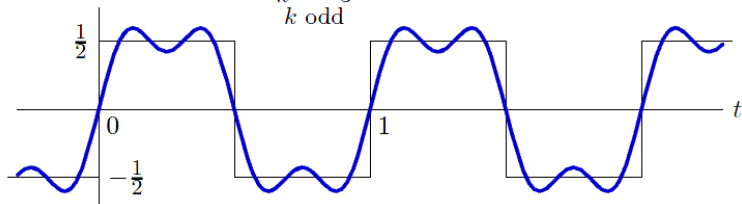
$$\sum_{\substack{k=-1 \\ k \text{ odd}}}^1 \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



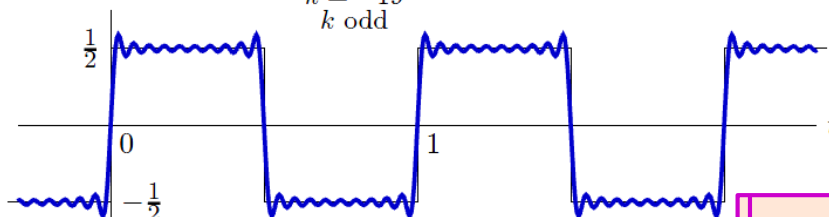
$$\sum_{\substack{k=-7 \\ k \text{ odd}}}^7 \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



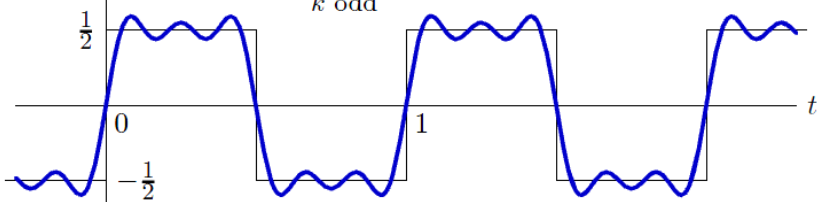
$$\sum_{\substack{k=-3 \\ k \text{ odd}}}^3 \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



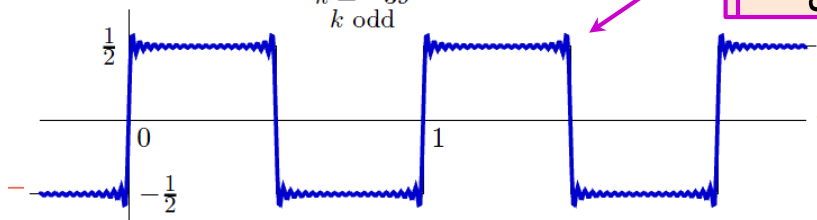
$$\sum_{\substack{k=-19 \\ k \text{ odd}}}^{19} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



$$\sum_{\substack{k=-5 \\ k \text{ odd}}}^5 \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



$$\sum_{\substack{k=-39 \\ k \text{ odd}}}^{39} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



پدیده گیبس
(Gibbs) در نقطه
ناپیوستگی



تبدیل فوریه سریع (FFT) ...

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad 0 \leq k < N$$

○ محاسبه ضرایب فوریه

- روش عادی: N^2 محاسبات (ضرب و جمع)

○ محاسبه تبدیل فوریه سریع (FFT: Fast Fourier Transform)

- مبنای ۲ (Radix-2)

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad 0 \leq k < N$$

- فرض: N زوج است

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f[n] W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} g[n] W_{N/2}^{nk} = F[k] + W_N^k G[k]$$

- نقاط زوج x : $f[n] = x[2n]$
- نقاط فرد x : $g[n] = x[2n+1]$

تبدیل $N/2$ نقطه‌ای $-f[n]$ نقاط 0 تا $N/2$

تبدیل $N/2$ نقطه‌ای $g[n]$

- به دلیل تقارن (برای $x[n]$ حقیقی): برای $\frac{N}{2} \leq k < N$

- برای N که توانی از ۲ است: محاسبات $N \cdot \log_2 N$

$$G[k + N/2] = G[k]$$



تبدیل فوریه سریع (FFT)

Speech_FFTExample.m

مثال ○

• در MATLAB

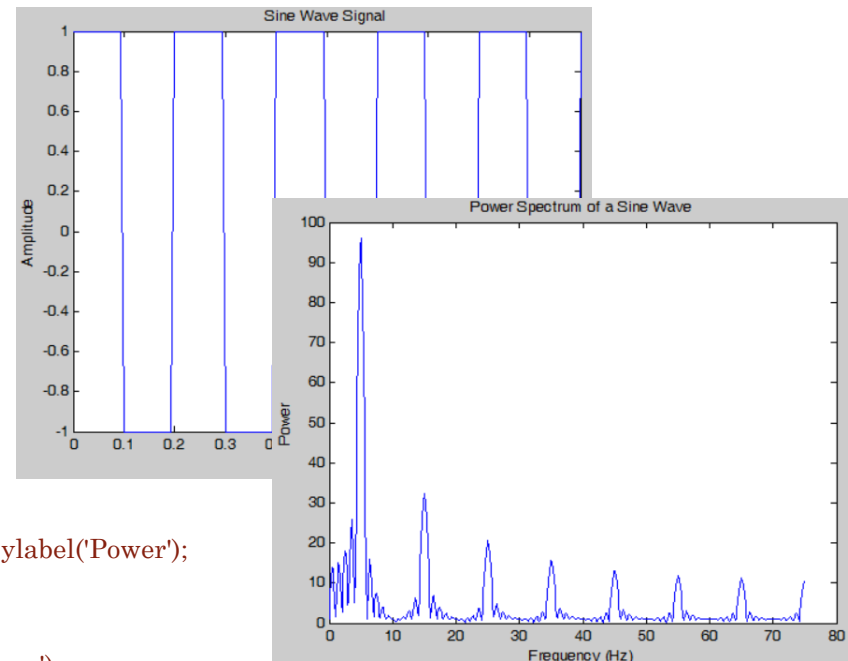
```

Fs = 150; % Sampling frequency
t = 0:1/Fs:1; % Time vector of 1 second
f = 5; % Create a sine wave of f Hz
x = sin(2*pi*t*f); % Sine Wave
pha=1/3*pi;%phase shift
x = cos(2*pi*t*f + pha); % Cosine Wave with Phase Shift
x = square(2*pi*t*f); % Square Wave

nfft = 1024; % Length of FFT
X = fft(x,nfft);
X = X(1:nfft/2); % FFT is symmetric, throw away second half
Mag = abs(X); % Take the magnitude of fft of x
Phase = angle(X); % Phase of fft of x
f = (0:nfft/2-1)*Fs/nfft;
figure(1); plot(t,x);
title('Wave Signal'); xlabel('Time(s)'); ylabel('Amplitude');

figure(2); plot(f,Mag);
title('Power Spectrum of the Wave'); xlabel('Frequency (Hz)'); ylabel('Power');

figure(3); plot(f,rad2deg(Phase));
title('Phase of the Wave'); xlabel('Frequency (Hz)'); ylabel('Degree');
    
```



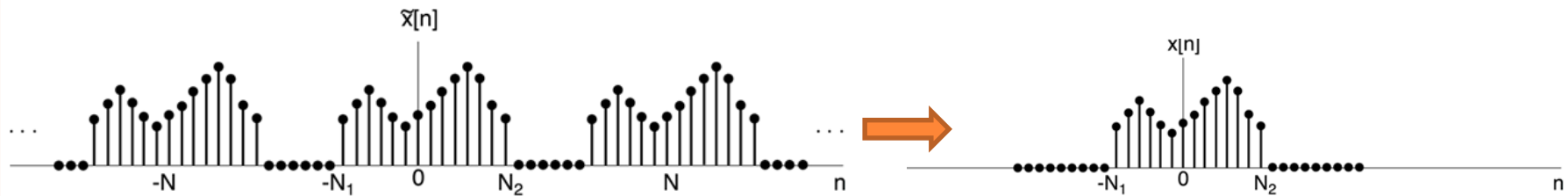


نمایش فوریه: تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) ...

وقتی که سیگنال متناوب نباشد

تبدیل فوریه گسسته (FT: Fourier Transform)

مقدار تناوب $\leftarrow \infty$: سری فوریه \leftarrow تبدیل فوریه



ورودی: سیگنال گسسته غیرمتناوب

خروجی: سیگنال پیوسته و متناوب



تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) ...

تبدیل فوریه گسسته (DTFT: Discrete-Time Fourier Transform)

- وقتی ورودی یک سیستم LTI، یک سیگنال نمایی (مختلط) مانند $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ باشد

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega_0(n-k)} = e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

تبدیل فوریه $h[n]$
پاسخ فرکانسی سیستم

- خروجی ضربی از ورودی است

- خروجی یک نمایی مختلط با همان بسامد و دامنه است که در مقدار (مختلط) $H(e^{j\omega_0})$ ضرب شده

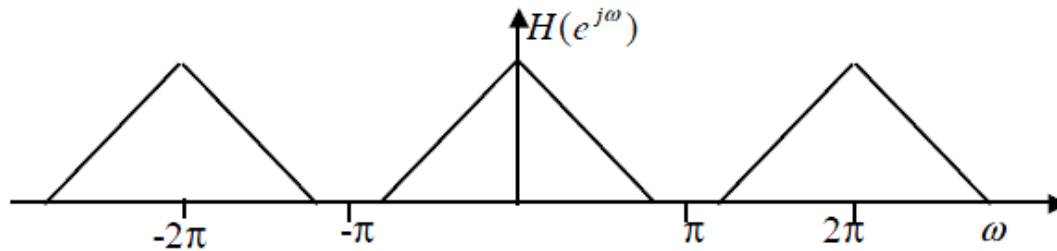




تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) ...

○ تبدیل فوریه گسسته - ویژگی‌ها

- تبدیل فوریه $H(e^{j\omega})$ پیوسته است
- تبدیل فوریه $H(e^{j\omega})$ دوره‌ای با دوره 2π است (بین π و $-\pi$)



- $H(e^{j\omega})$ = تابع تبدیل (Transfer Function) یا پاسخ فرکانسی (Frequency Response)
- ω = فرکانس زاویه‌ای = $2\pi f$

اندازه (دامنه)

- تبدیل فوریه $H(e^{j\omega})$ تابعی مختلط است

$$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega}) + jH_i(e^{j\omega}) \quad \longrightarrow \quad H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}$$

فاز

$$\text{Magnitude} = \sqrt{\text{real}^2 + \text{Imag}^2}$$

$$\text{Angle} = \tan^{-1}\left(\frac{\text{imag}}{\text{real}}\right)$$



تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) ...

○ شرط لازم برای داشتن تبدیل فوریه

• محدود بودن انرژی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

○ تبدیل فوریه گسسته - معکوس

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

• داریم

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \delta[n-m] = h[n]$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \delta[n-m]$$

• که



تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) ...

○ تبدیل فوریه گسسته (DTFT) و معکوس آن

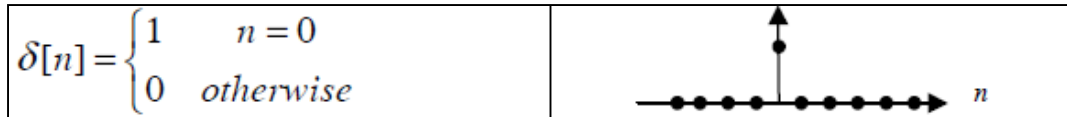
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad \text{Analysis equation}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad \text{Synthesis equation}$$



تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) ...

○ مثال: تابع ضربه



$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$$

• حالت جابجا شده

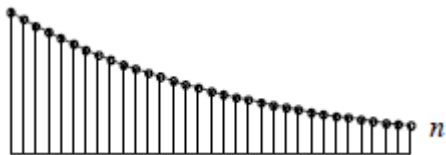
$$x[n] = \delta[n - n_0] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

○ دامنه ۱ و فاز $-\omega n_0$



تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) ...

مثال: تابع نمایی (نزولی)



$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

فرمول Infinite Sum

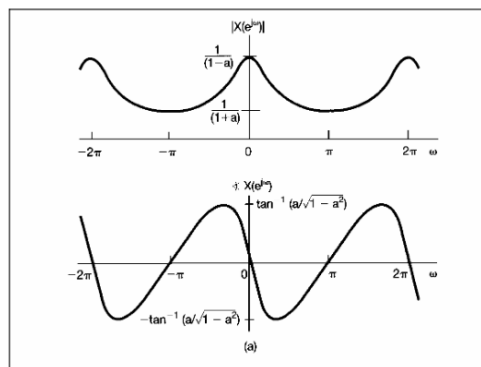
$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(ae^{-j\omega})^n}_{|ae^{-j\omega}| < 1} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - a \cos \omega) + ja \sin \omega}$$

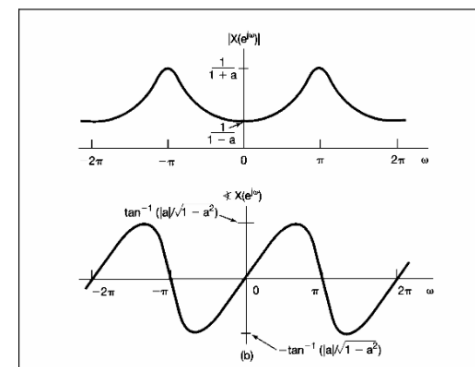
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}}$$

$$\omega = 0 : X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a + a^2}} = \frac{1}{1 - a}$$

$$\omega = \pi : X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2a + a^2}} = \frac{1}{1 + a}$$



a > 0

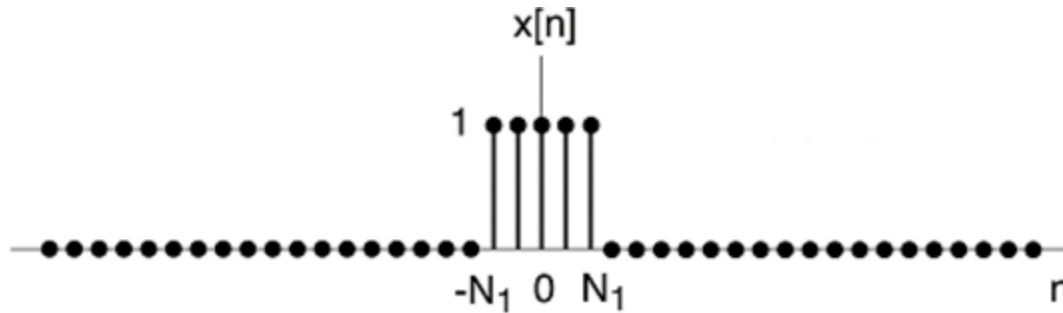


a < 0

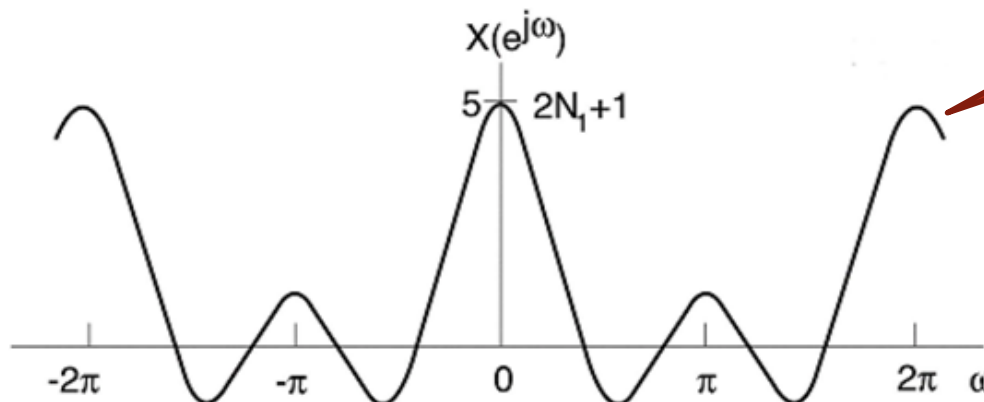


تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته)

○ مثال: موج مربعی



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} (e^{-j\omega})^n = \frac{\sin \omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(\omega/2)} = X(e^{j(\omega-2\pi)})$$



تابع Sinc

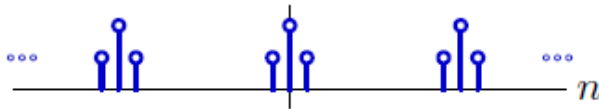


نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی ...

○ چهار حالت برای زمان

- discrete vs. continuous (\updownarrow)
- periodic vs. non-periodic (\leftrightarrow)

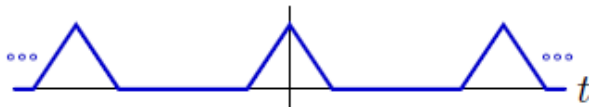
DT Fourier Series



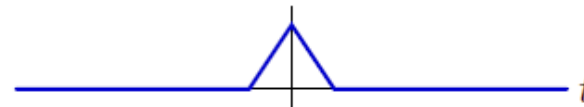
DT Fourier transform



CT Fourier Series



CT Fourier transform



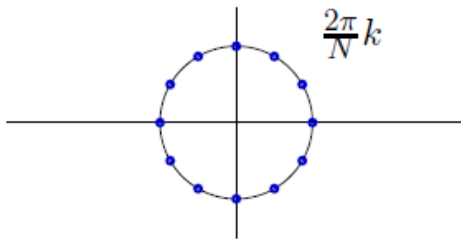


نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی ...

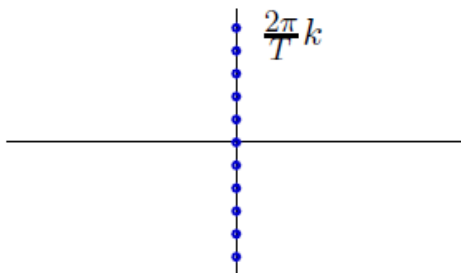
○ چهار حالت فرکانس

- discrete vs. continuous (\leftrightarrow)
- periodic vs. non-periodic (\updownarrow)

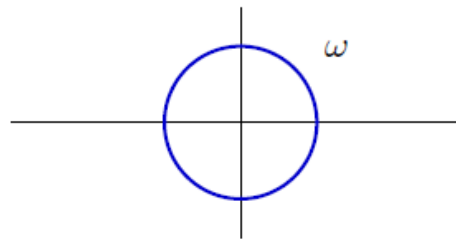
DT Fourier Series



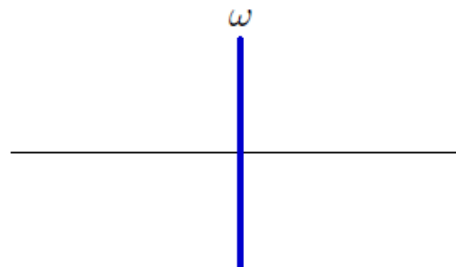
CT Fourier Series



DT Fourier transform



CT Fourier transform





نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی ...

○ مقایسه نمایش‌های فوریه

نمایش فوریه	نوع	حوزه زمان	حوزه فرکانس
Fourier Series	Continuous Time Fourier Series (CTFS)	periodic, continuous	discrete, non-periodic
	Discrete Time Fourier Series (DTFS)	periodic, discrete	discrete, periodic
Fourier Transform	Continuous Time Fourier Transform (CTFT)	non-periodic, continuous	continuous, non-periodic
	Discrete Time Fourier Transform (DTFT)	non-periodic, discrete	continuous, periodic (2π periodic)



نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی ...

○ دوره‌های بودن-نبودن در حوزه زمان

حوزه فرکانس	حوزه زمان
discrete	periodic
continuous	non-periodic

○ پیوسته-گسسته بودن در حوزه زمان

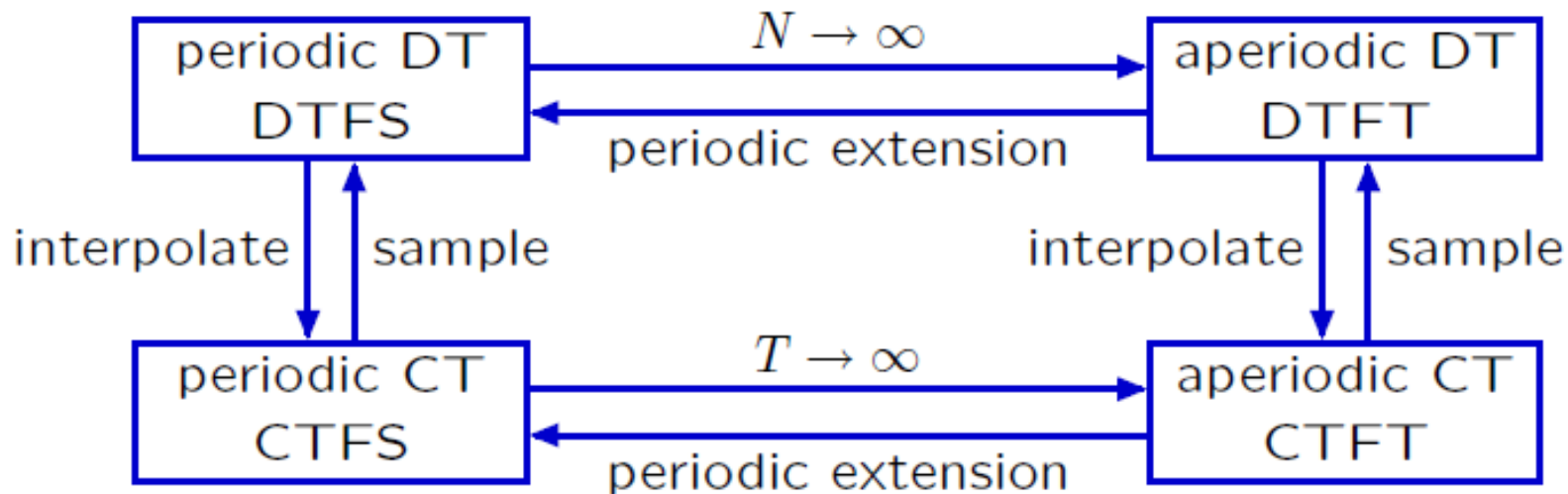
حوزه فرکانس	حوزه زمان
periodic	discrete
non-periodic	continuous



نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی ...

○ نمایش‌های مختلف فوریه

- DTFS (discrete-time Fourier series): periodic DT
- DTFT (discrete-time Fourier transform): non-periodic DT
- CTFS (continuous-time Fourier series): periodic CT
- CTFT (continuous-time Fourier transform): non-periodic CT





نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی ...

روابط

DT Fourier Series

$$a_k = a_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n] = x[n+N] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DT Fourier transform

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\Omega$$

CT Fourier Series

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

CT Fourier transform

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی

تبدیل فوریه تعدادی از توابع

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=(N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq N/2 \end{cases}$ and $x[n + N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]}, k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n + 1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n + r - 1)!}{n!(r - 1)!} a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—



فیلتر کردن ...

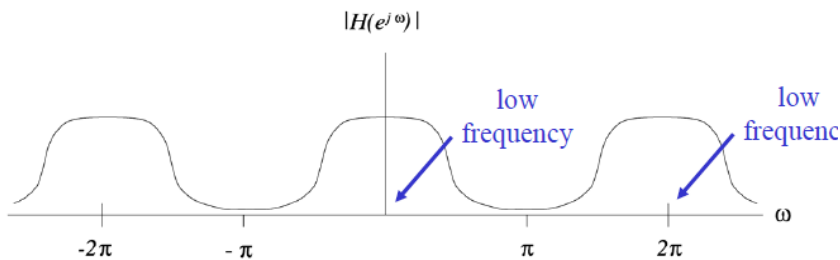
فیلتر: حذف بازه‌های فرکانسی خاص

فیلتر پایین گذر (Lowpass Filter)

حذف فرکانس‌های بالا

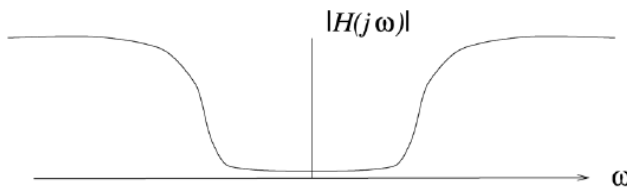
$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)}) \quad \text{داریم}$$

بیشترین فرکانس در π



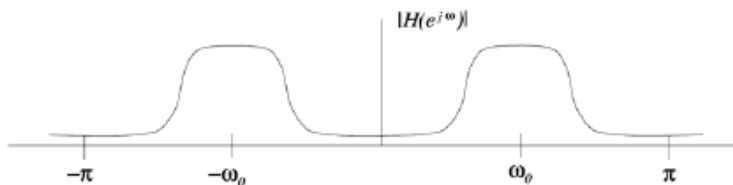
فیلتر بالاگذر (Highpass Filter)

حذف فرکانس‌های پایین



فیلتر میان گذر (Bandpass Filter)

حذف فرکانس‌های بالا و پایین



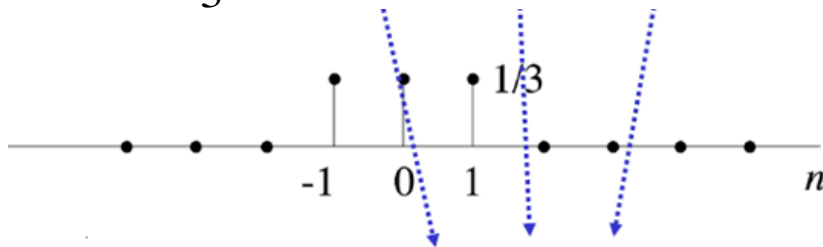
فیلتر کردن ...

○ مثال: میانگین گیری/هموارسازی (Averager/Smother)

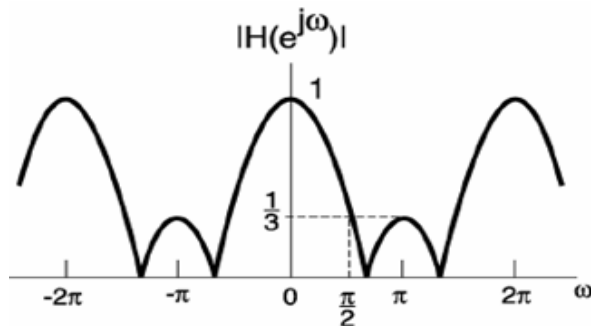
• حذف نویز و مات کردن تصویر

$$y[n] = \frac{1}{3} \{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

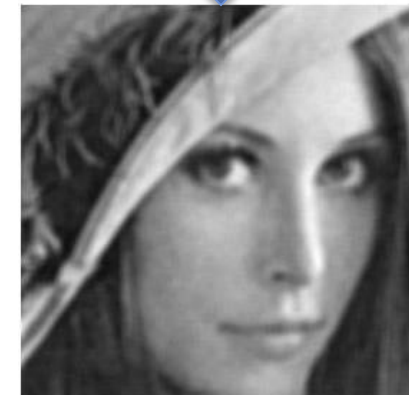
$$h[n] = \frac{1}{3} \{\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\}$$



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{3}[e^{-j\omega} + 1 + e^{j\omega}] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\omega$$



LPF





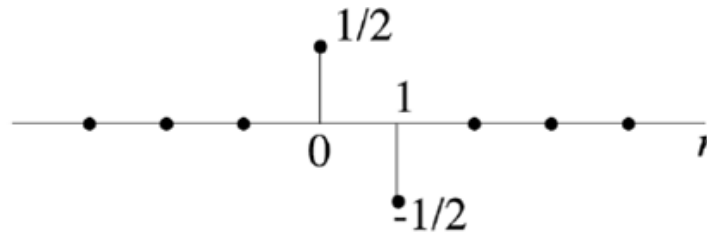
فیلتر کردن ...

مثال: مشتق (differentiator)

تشخیص لبه در تصویر

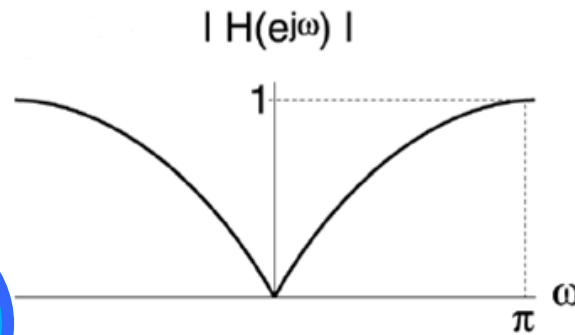
$$y[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x[n-1]\}$$

$$h[n] = \frac{1}{2} \{\delta[n] - \delta[n-1]\}$$

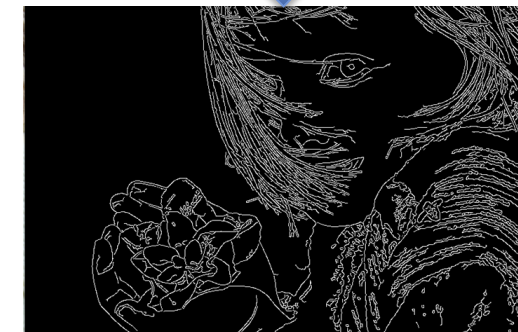


$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega}) = je^{-j\omega/2} \sin(\omega/2)$$

$$|H(e^{j\omega})| = |\sin(\omega/2)|$$



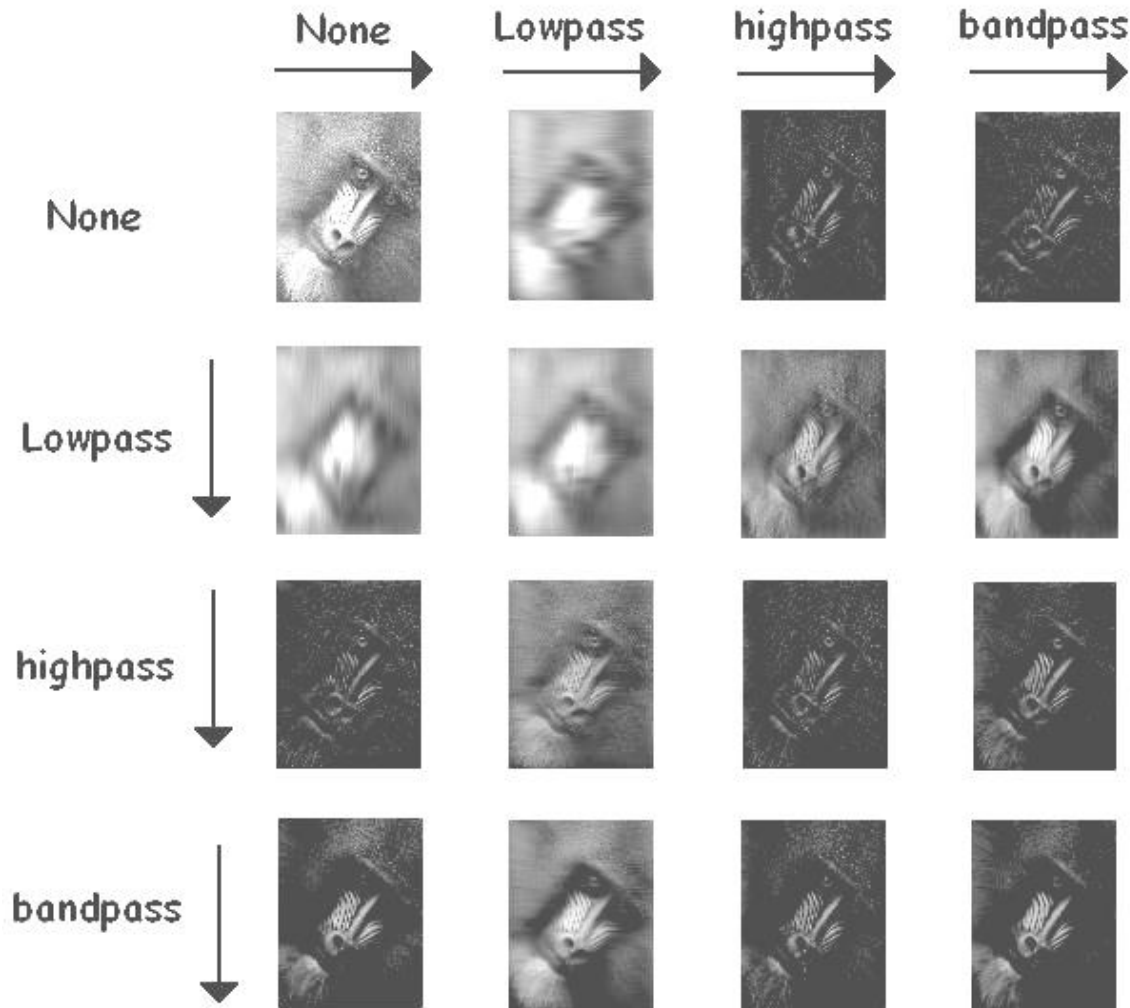
Passes high-frequency components





فیلتر کردن

مثال ○





تبدیل Z (فرکانس پیوسته) ...

○ تبدیل Z

Z = متغیر مختلط

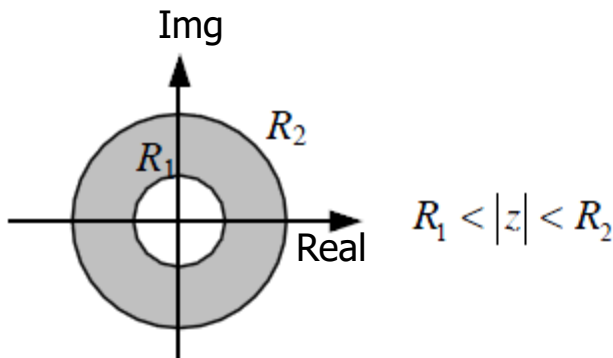
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

- حالت توسعه یافته تبدیل فوریه گسسته
- تبدیل Z = تبدیل فوریه اگر $z = e^{j\omega}$

• شرط وجود تبدیل Z $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| |z|^{-n} < \infty$

○ فقط برای مقادیری مشخص از Z این شرط برقرار است

○ ناحیه ROC: region of convergence



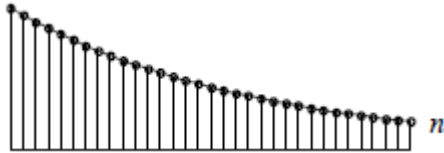
○ سیگنال $h[n]$ دارای تبدیل فوریه است اگر تبدیل Z آن شامل دایره واحد باشد، $|z|=1$

○ ناحیه همگرایی شامل دایره واحد باشد



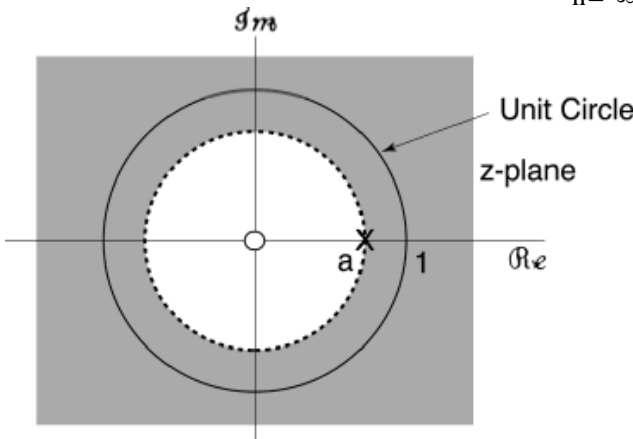
تبدیل Z (فرکانس پیوسته) ...

مثال: تابع نمایی (سمت راست)



$$h_3[n] = a^n u[n] \implies X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

شرط: $|az^{-1}| < 1 \implies |z| > |a|$



• ناحیه همگرایی: $|a| < |z|$

• قطب (Pole): مقادیری که مخرج را برابر صفر می کنند

○ در اینجا $z=a$

• صفر (Zero): مقادیری که صورت را برابر صفر می کنند

○ در اینجا $z=0$

• شرط پایداری: ناحیه همگرایی شامل دایره واحد باشد، پس باید $|a| < 1$

○ قطب داخل دایره واحد باشد

• قطب خارج از دایره واحد: سیستم ناپایدار یا غیرعلی (یا هر دو)



تبدیل Z (فرکانس پیوسته) ...



○ مثال: تابع نمایی (سمت چپ)

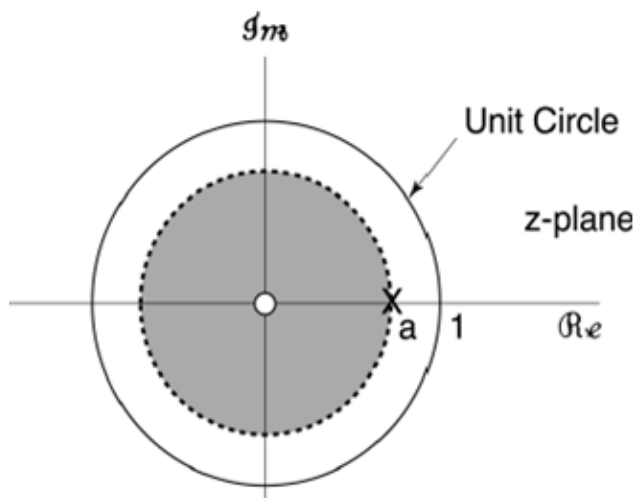
$$h_4[n] = -a^n u[-n-1] \rightarrow$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{-a^n u[-n-1] z^{-n}\}$$

$$= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{a^{-1} z}{a^{-1} z - 1} = \frac{z}{z - a}$$

شرط: $|a^{-1} z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$



- تبدیل Z حاصل با تبدیل Z تابع مثال قبلی یکسان است
- تفاوت در ROC



تبدیل Z (فرکانس پیوسته) ...

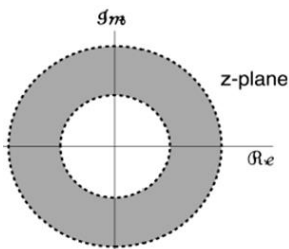
مثال: چند تابع رایج

Signal	Z-Transform	Region of Convergence
$h_1[n] = \delta[n - N]$	$H_1(z) = z^{-N}$	$z \neq 0$
$h_2[n] = u[n] - u[n - N]$	$H_2(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$	$z \neq 0$
$h_3[n] = a^n u[n]$	$H_3(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ a < z $
$h_4[n] = -a^n u[-n - 1]$	$H_4(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $

• برای توابعی که ترکیبی خطی از توابع نمایی به ازای $n < 0$ و $n > 0$ است

• تبدیل Z حاصل به صورت کسری چند جمله ای، $X(z) = N(z)/D(z)$ است

• ناحیه ROC به صورت حلقه است





تبدیل Z (فرکانس پیوسته) ...

○ استفاده برای تعیین مشخصات سیستم

• سیستم LTI علی (causal) = اگر پاسخ فرکانسی آن علی باشد: $h[n]=0$ برای $n<0$

○ سیستم‌های واقعی عموماً علی هستند

○ ROC شامل ناحیه بیرون از دایره واحد و شامل نقطه بینهایت باشد

○ در توابع چندجمله‌ای: درجه صورت از درجه مخرج بیشتر نباشد

• سیستم پایدار (stable): ورودی محدود، خروجی محدود را نتیجه می‌دهد

○ تابع $h[n]$ دارای تبدیل فوریه است و ناحیه همگرایی شامل دایره واحد است

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

○ معکوس تبدیل Z

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) z^{n-1} dz$$

انتگرال روی یک مسیر بسته در ناحیه همگرایی



تبدیل Z (فرکانس پیوسته) ...

تبدیل معکوس توابع گویا

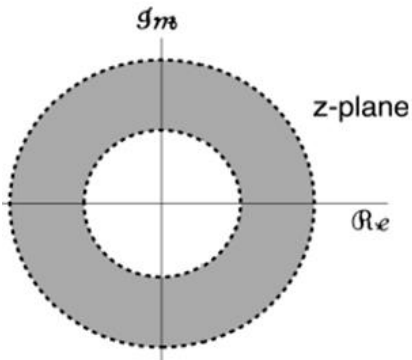
تبدیل به یکی از فرمهای شناخته شده

$$H_5(z) = \frac{2 + 8z^{-1}}{2 - 5z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{A}{1 - 3z^{-1}} + \frac{B}{1 + (1/2)z^{-1}} = \frac{(2A + 2B) + (A - 6B)z^{-1}}{2 - 5z^{-1} - 3z^{-2}}$$

دو قطب در ۳ و ۰.۵-

$$2A + 2B = 2$$

$$A - 6B = 8$$



$$H_5(z) = 2 \left(\frac{1}{1 - 3z^{-1}} \right) - \left(\frac{1}{1 + (1/2)z^{-1}} \right)$$

$$H_4(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}}$$

$$|z| < 3$$

$$H_3(z) = \frac{1}{1 + (1/2)z^{-1}}$$

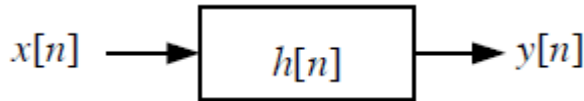
$$1/2 < |z|$$

ناحیه همگرایی
باید شامل دایره واحد باشد
(شرط پایداری)

$$h_4[n] = -3^n u[-n-1] \rightarrow h_5[n] = -2 \cdot 3^n u[-n-1] - (-1/2)^n u[n] \leftarrow h_3[n] = (-1/2)^n u[n]$$



ویژگی‌های تبدیل Z و فوریه ...



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

• کانولوشن

• تبدیل کانولوشن به ضرب توسط تبدیل فوریه گسسته و تبدیل Z

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]z^{-n} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-(n+k)} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} H(z) = X(z)H(z) \end{aligned}$$

ناحیه همگرایی = اشتراک ناحیه همگرایی X(z) و H(z)

• رابطه دوگان $x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$



ویژگی‌های تبدیل Z و فوریه ...

○ قضیه پارسوال و توان طیف

• خودهمبستگی (autocorrelation)

مزدوج مختلط (complex conjugate)
 $z = x + jy (Ae^{j\theta}) \rightarrow z^* = x - jy (Ae^{-j\theta})$

$$R_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m+n]x^*[m] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]x^*[-(n-l)] = x[n] * x^*[-n]$$

$$S_{xx}(\omega) = X(\omega)X^*(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad \bullet \text{ توان طیف}$$

• تبدیل فوریه خودهمبستگی = توان طیف

$$R_{xx}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad \leftarrow R_{xx}[n] \leftrightarrow S_{xx}(\omega)$$

• قرار دادن $n=0$ در روابط فوق نتیجه می دهد (قضیه پارسوال: Parseval)

○ برابری انرژی سیگنال برای محاسبه در حوزه زمان و فرکانس

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$



ویژگی‌های تبدیل Z و فوریه

○ خلاصه

Property	Signal	Fourier Transform	z-Transform
Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Symmetry	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$	$X(z^{-1})$
	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$	$X^*(z^*)$
	$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$	$X^*(1/z^*)$
	$x[n]$ real	$X(e^{j\omega})$ is Hermitian $X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$ $ X(e^{j\omega}) $ is even ⁶ $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ is even $\text{arg}\{X(e^{j\omega})\}$ is odd ⁷ $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ is odd	$X(z^*) = X^*(z)$
	Even $\{x[n]\}$	$\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$	
Odd $\{x[n]\}$	$j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$		
Time-shifting	$x[n - n_0]$	$X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$	$X(z)z^{-n_0}$
Modulation	$x[n]e^{j\omega_0 n}$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$	$X(e^{-j\omega_0} z)$
	$x[n]z_0^n$		$X(z/z_0)$
Convolution	$x[n] * h[n]$	$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$	$X(z)H(z)$
	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$	
Parseval's Theorem	$R_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m+n]x^*[m]$	$S_{xx}(\omega) = X(\omega) ^2$	$X(z)X^*(1/z^*)$

function $f(x)$ is called even if and only if $f(x) = f(-x)$.
function $f(x)$ is called odd if and only if $f(x) = -f(-x)$.



تبدیل کسینوسی گسسته (DCT)

○ تبدیل DCT-II

- معادل تبدیل DFT برای داده های حقیقی و متقارن

$$C[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(\pi k(n+1/2)/N) \quad \text{for } 0 \leq k < N$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \left\{ C[0] + 2 \sum_{k=1}^{N-1} C[k] \cos(\pi k(n+1/2)/N) \right\} \quad \text{for } 0 \leq n < N$$

$$X[k] = 2e^{j\pi k/2N} C[k] \quad \text{for } 0 \leq k < N$$

$$X[2N-k] = 2e^{-j\pi k/2N} C[k] \quad \text{for } 0 \leq k < N$$



دموی برخط

○ امتحان کنید

- <http://pages.jh.edu/~signals/>
- <http://ptolemy.eecs.berkeley.edu/eecs20/berkeley/body.html>
- www.fourier-series.com

